Encontrarás los recursos digitales y el formato digital del libro en

ecasals.net/dibujo2ba

BACHILLERATO

2 DIBUJO TÉCNICO

Casals

B. Mas
R. Gasull

ÍNDICE

I GEOMETRÍA

II SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

UNIDAD 4 **Sistema diédrico. Movimientos** CC Pág. 75	**1. Introducción al sistema diédrico**	▸ Proyecciones diédricas de los elementos fundamentales. ▸ Propiedades y características de las posiciones relativas.
	2. Cambios de plano	▸ Nuevas proyecciones del punto. ▸ Nuevas proyecciones de la recta. ▸ Nuevas proyecciones del plano. ▸ Obtención de posiciones favorables de rectas. ▸ Obtención de posiciones favorables de planos.
	3. Giros	▸ Giro de un punto. ▸ Giro de una recta. ▸ Giro de un plano. ▸ Obtención de posiciones favorables de rectas. ▸ Obtención de posiciones favorables de planos.
	4. Abatimientos	▸ Abatimiento de un plano. ▸ Determinación de la verdadera magnitud de formas planas. ▸ Restituir a proyecciones formas abatidas.
	ACTIVIDADES	

UNIDAD 5 **Sistema diédrico. Verdaderas magnitudes** CM Pág. 95	**1. Distancia entre los elementos fundamentales. Posiciones favorables**	▸ Entre dos puntos. ▸ Entre punto y plano. ▸ Entre punto y recta. ▸ Entre rectas paralelas. ▸ Entre planos paralelos. ▸ Entre dos rectas que se cruzan.
	2. Ángulos entre los elementos fundamentales. Posiciones favorables	▸ Entre dos rectas. ▸ Entre dos planos. ▸ Entre recta y plano. ▸ Con los planos de proyección.
	ACTIVIDADES	

UNIDAD 6 **Sistema diédrico. Poliedros regulares** CM Pág. 115	**1. Superficies y cuerpos**	▸ Concepto de superficie. ▸ Clasificación. ▸ Poliedros regulares. ▸ Fórmula de Euler. ▸ Poliedros conjugados.
	2. El tetraedro	▸ Elementos y relaciones. ▸ Representaciones.
	3. El hexaedro o cubo	▸ Elementos y relaciones ▸ Representaciones.
	4. El octaedro	▸ Elementos y relaciones. ▸ Representaciones.
	5. El dodecaedro	▸ Elementos y relaciones. ▸ Representaciones.
	6. El icosaedro	▸ Elementos y relaciones. ▸ Representaciones.
	7. Secciones e intersecciones, desarrollos y transformadas	▸ Secciones planas de los poliedros. ▸ Intersecciones de recta y poliedro. ▸ Desarrollos.
	8. Presencia de los poliedros regulares	▸ Antecedentes históricos. ▸ Poliedros y arte.
	ACTIVIDADES	

COMPETENCIAS

- CM Competencia matemática y competencias en ciencia y tecnología
- CD Competencia digital
- CC Conciencia y expresiones culturales
- CS Competencias sociales y cívicas
- CI Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor
- CA Aprender a aprender
- CL Comunicación lingüística

ACTIVIDADES

- ▲ Avanzada
- ▲▲ Reto

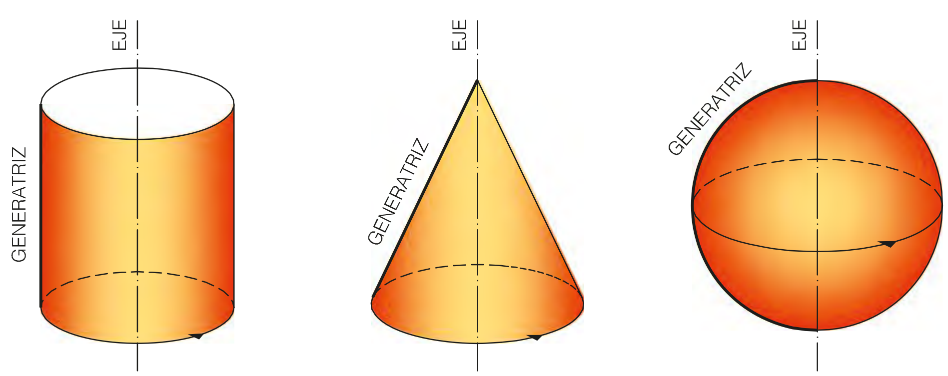
Curvas cónicas y técnicas

CA Competencia en aprender a aprender

Las curvas geométricas planas se subdividen en **técnicas** y **cónicas.** Una parte de las primeras, óvalos, espirales, etc., las estudiamos en Dibujo técnico 1 como aplicación de las tangencias; en esta unidad completaremos su estudio con las curvas cíclicas y evolventes. Previamente conoceremos las curvas cónicas.

1 GENERACIÓN Y CLASIFICACIÓN DE LAS CURVAS CÓNICAS

Una **superficie de revolución** se genera por el movimiento de rotación, alrededor de un **eje,** de una línea que se denomina **generatriz,** de manera que los puntos que la forman, durante todo el movimiento, se mantienen equidistantes del eje. Según el tipo de generatriz y la posición que tenga en relación con el eje, obtendremos, por ejemplo, las superficies de revolución de la figura 1.



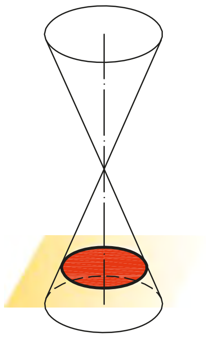
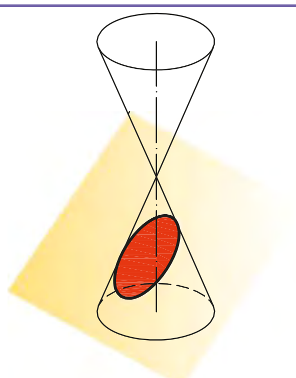
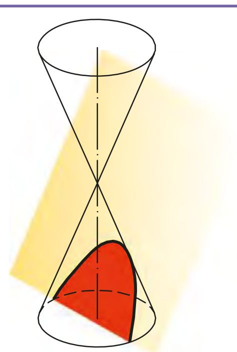
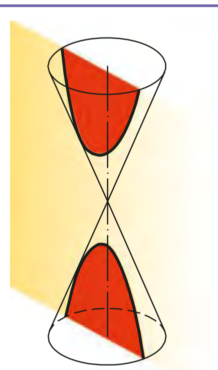
SUPERFICIE CILÍNDRICA SUPERFICIE CÓNICA SUPERFICIE ESFÉRICA

Fig. 1

* Las palabras marcadas con un asterisco están definidas en el Anexo final del libro (Glosario).

De estas superficies nos interesa la **cónica de revolución,** que se genera por el movimiento de una recta alrededor de un eje con el que se corta en el vértice de la superficie cónica. El ángulo con el que la generatriz corta el eje es constante.

Se necesitan dos elementos para generar una curva cónica: una superficie cónica de revolución y un plano secante que, según su posición, determinará las siguientes curvas cónicas:

Curva cónica	Figura	Posición del plano secante
Circunferencia		Plano secante perpendicular al eje. Es una curva cerrada.
Elipse		Plano oblicuo al eje y a las generatrices. Es una curva cerrada.
Parábola		Plano secante paralelo a una generatriz. Es una curva abierta.
Hipérbola		Plano secante paralelo al eje. Es una curva abierta.

De la circunferencia estudiaremos los ángulos relacionados con ella y el arco capaz. Las otras tres secciones cónicas tienen los siguientes elementos comunes:

- **Ejes de simetría:** la elipse y la hipérbola tienen dos ejes perpendiculares entre sí. La parábola tiene un único eje de simetría.
- **Vértices:** son los puntos de intersección de una curva cónica y sus ejes.
- **Centro:** es el punto de intersección de los ejes.
- **Focos:** están situados sobre uno de los ejes de simetría. Son los puntos de tangencia entre las esferas inscritas en la superficie cónica y el plano secante que produce la curva cónica. La elipse y la parábola tienen dos focos, **F** y **F';** la parábola únicamente tiene uno.
- **Circunferencia principal:** es el lugar geométrico* de los pies de las perpendiculares trazadas desde los focos a cada una de las tangentes a la cónica; su centro es el de la elipse o hipérbola y su diámetro es igual a la longitud del eje mayor de la cónica.
- **Circunferencia focal:** es el lugar geométrico de los puntos simétricos de un foco en relación con las rectas tangentes a la cónica; su centro es el otro foco y su radio, la longitud del eje mayor.

Las anteriores circunferencias, según las definiciones expresadas, las utilizaremos para trazar rectas tangentes a las curvas cónicas en la unidad 3.

2 LA ELIPSE

La elipse es una curva cerrada y plana, lugar geométrico de los puntos en que las sumas de las distancias a los focos, **F** y **F',** es constante e igual a la longitud de su eje mayor.
En la elipse de la figura 2 el eje mayor es el segmento **AB,** que se designa como **2a,** y el eje menor es el segmento **CD,** designado por **2b;** ambos se cortan por sus respectivos puntos medios y determinan el centro **O.** Los ejes, al cortar la elipse, determinan los cuatro vértices **A, B, C** y **D.**

Si conocemos los ejes, podemos determinar la posición de los focos **F** y **F'.** Haciendo centro en los vértices **C** o **D** y con un radio igual a la longitud **a** del semieje* mayor, trazamos un arco que corte el eje mayor en los puntos **F** y **F'.** La distancia entre los focos **FF'** se denomina distancia focal **2c.** El vértice **C,** como punto de la elipse, ha de cumplir la definición de lugar geométrico: la suma de las distancias a los focos **CF** y **CF'** debe ser igual a la longitud **2a,** dado que **C** pertenece al eje de simetría vertical, **CF = CF' = a.**

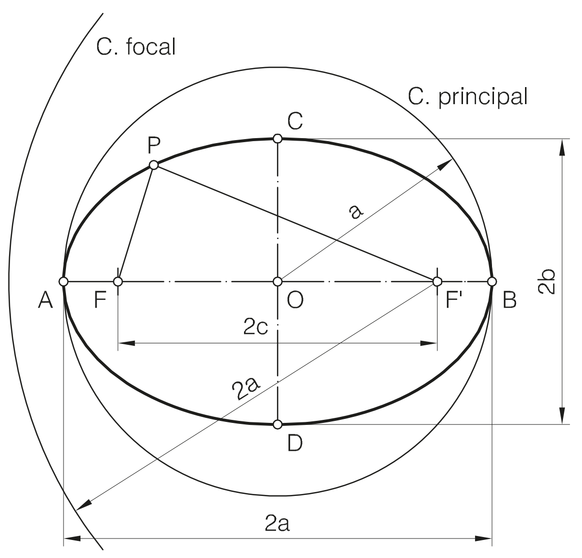


Fig. 2

El proceso de representación de una elipse pasa por determinar distintos puntos y realizar la unión a mano alzada, mediante una plantilla de elipses o una regla flexible. Veamos diversos procedimientos:

2.1 Dados los dos ejes, por puntos

Situamos los ejes **AB** y **CD** perpendiculares por los respectivos puntos medios; con un arco de centro en **C** y radio **a,** determinaremos los focos (Fig. 3). En el espacio entre uno de los focos y el centro marcamos una serie de divisiones arbitrarias: **1, 2, 3,** etc.

Tomamos dos radios iguales a las distancias **1A** y **1B** y, situando el centro alternativamente en los dos focos, describiremos ocho arcos de circunferencia que, en sus intersecciones, nos determinarán cuatro puntos de la elipse. Repetiremos el proceso con las distancias **2A** y **2B, 3A** y **3B** para hallar nuevos puntos de la elipse.

La unión de los puntos obtenidos más los cuatro vértices **A, B, C** y **D** completan el trazado de la elipse.

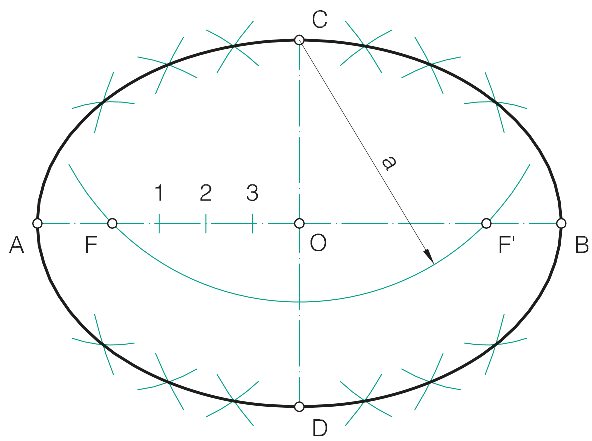


Fig. 3

2.2 Dados los ejes, por afinidad*

Trazamos dos circunferencias de diámetros iguales a las longitudes de los ejes de la elipse y, dentro de estas, una serie de radios comunes, ocho en la construcción de la figura 4.

Por el punto de corte de cada radio con la circunferencia mayor trazamos una paralela al eje menor, y por el punto de corte del mismo radio con la circunferencia menor, una paralela al eje mayor. La intersección de las dos paralelas es un punto de la elipse.

Repitiendo el proceso con todos los radios trazados, obtendremos un número suficiente de puntos que, junto con los cuatro vértices, nos permitirán trazar la cónica.

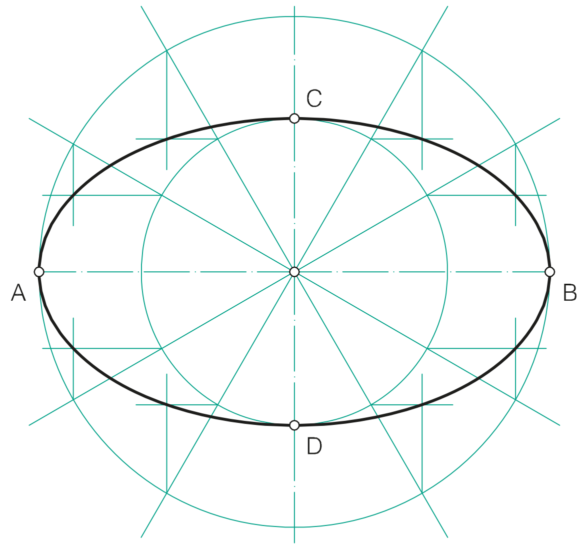


Fig. 4

2.3 Dados los ejes, por haces proyectivos

Dibujamos el rectángulo **EFGH,** con lados paralelos y de igual longitud que los ejes dados. Dividimos el semieje **OA** y la mitad **AH** del lado del rectángulo en el mismo número de partes, cuatro en la figura 5.

Las intersecciones de los haces **D1** y **C1, D2** y **C2, D3** y **C3** determinan puntos de la elipse. Este número de puntos lo multiplicaremos por cuatro al repetir el proceso en los otros cuadrantes* que, unidos con los vértices, completarán el trazado de la elipse.

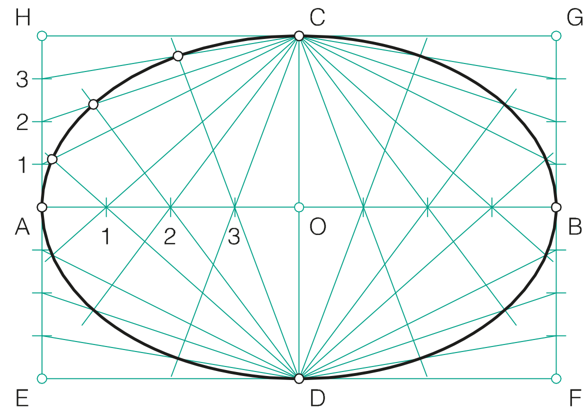


Fig. 5

2.4 Dados dos diámetros conjugados

Denominamos **diámetros conjugados** de una elipse a dos cuerdas que pasan por su centro de tal modo que cualquier paralela a una de ellas es cortada por la otra en dos partes iguales, **AB** y **CD** en la figura 6.

Conocidos los diámetros conjugados **AB** y **CD,** dibujamos el romboide de la figura 7, con lados paralelos y de igual longitud que los diámetros dados. En relación con uno de los lados, trazamos una semicircunferencia y el rectángulo tangente que la circunscribe.

En este rectángulo, los segmentos que unen el punto **D** con los vértices opuestos cortan la semicircunferencia en los puntos **1** y **2;** pasando por ellos trazamos paralelas a los lados del rectángulo, determinando los puntos **M** y **N** y, desde estos, paralelas a los lados del romboide. Estas últimas paralelas interceptan sobre las diagonales cuatro puntos de la elipse; por estos y por los extremos de los dos diámetros conjugados pasa la curva.

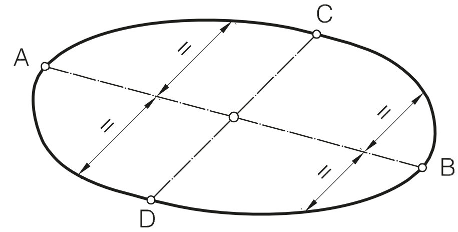


Fig. 6

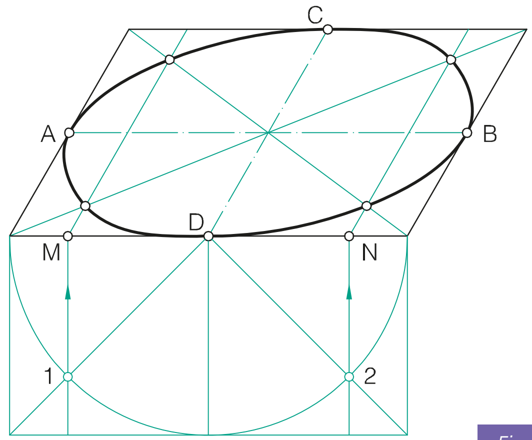


Fig. 7

2.5 Dados los ejes, método de la tarjeta

Otro procedimiento para dibujar elipses es el llamado método de la tarjeta. Por la cantidad de puntos que facilita, se puede usar con bastante precisión, por lo que resulta fácil y práctico. Sobre el canto de una tira de papel marcamos las longitudes correspondientes a los dos semiejes de la elipse a partir de un punto común **P** (Fig. 8).

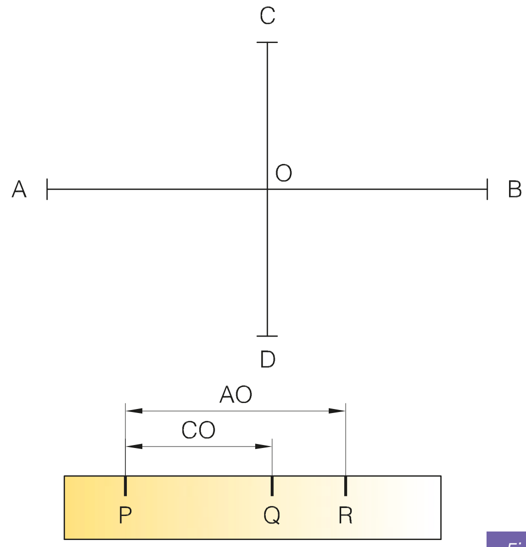


Fig. 8

Se hace coincidir el punto **R** de la tarjeta con el semieje menor de la elipse y el punto **Q** con el semieje mayor. El punto **P** determina, para diferentes posiciones de la tarjeta, puntos de la elipse (Fig. 9).

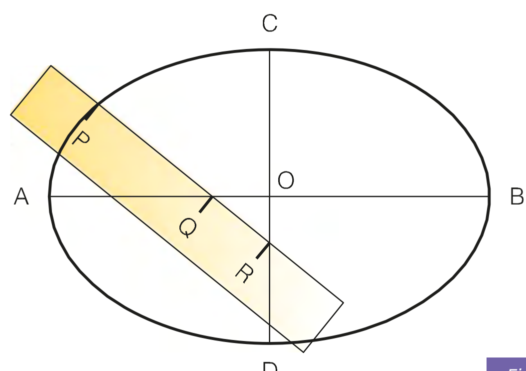


Fig. 9

3 LA PARÁBOLA

La parábola es una curva abierta y plana, lugar geométrico de los puntos equidistantes del foco, **F,** y de la **directriz,** que es la forma que toma la circunferencia focal al tener radio infinito.

La parábola (Fig. 10) tiene un único **eje de simetría,** perpendicular a la directriz, sobre el cual se hallan el **foco** y el **vértice V,** que es el punto de intersección entre la parábola y el eje.

El parámetro **p** de una parábola es la distancia que hay entre el foco y la directriz. El vértice, como punto de la curva situado en el eje, equidista del foco y de la directriz. La combinación de algunos de estos elementos son los datos más frecuentes para la construcción de una parábola.

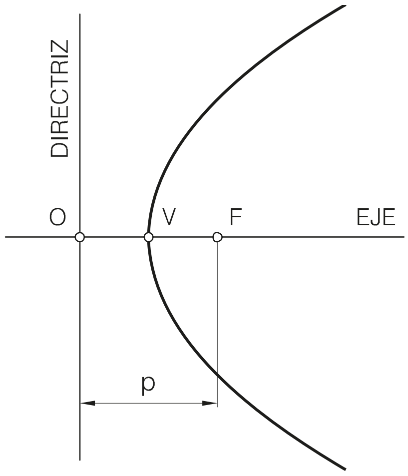


Fig. 10

3.1 Dados el foco y la directriz

La perpendicular desde el foco **F** a la directriz corresponde al eje de la cónica. El punto medio del segmento **FO,** situado sobre el eje, es el vértice **V** de la parábola (Fig. 11).

Para determinar otros puntos, dibujamos las paralelas a la directriz **1, 2, 3, 4,** etc. a cualquier distancia; sobre cada paralela habrá dos puntos de la parábola. Con un radio igual a la distancia de la paralela **1** a la directriz, y colocando el centro en el foco **F,** trazamos dos arcos que cortarán esta paralela en dos puntos de la cónica.

Repetimos el proceso con la distancia de las paralelas **2, 3, 4...** a la directriz; en cada distancia hallaremos, en la paralela correspondiente, dos nuevos puntos. La unión de estos puntos, conteniendo el vértice **V,** definirá la parábola.

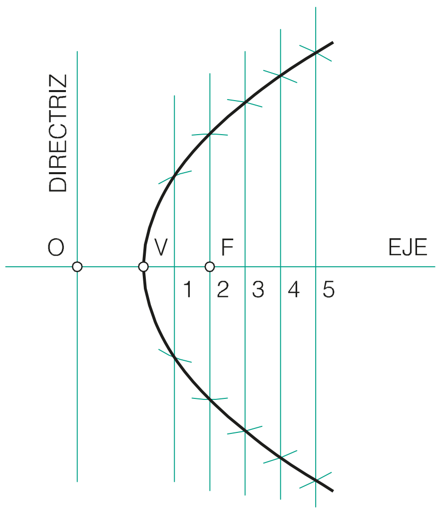


Fig. 11

3.2 Dados el vértice, el eje y uno de sus puntos

Desde el vértice **V** y el punto **P** dados trazamos, respectivamente, una perpendicular y una paralela al eje que se corten en el punto **A.** Dividimos los segmentos **VA** y **PA** en el mismo número de partes, cuatro en la figura 12. Por las divisiones del segmento **VA** trazamos paralelas al eje y unimos las divisiones del segmento **PA** con el vértice **V;** los puntos de intersección son puntos de la curva.

Para completar el trazado de la parábola determinamos los simétricos respecto al eje, tanto del punto **P** dado como de los puntos encontrados posteriormente.

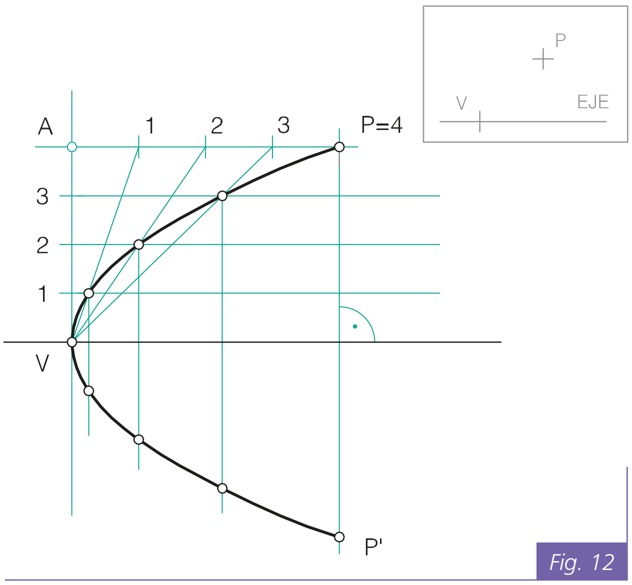


Fig. 12

4 LA HIPÉRBOLA

La hipérbola es una curva abierta y plana, lugar geométrico de los puntos en que la diferencia de las distancias a los focos, **F** y **F'**, es constante e igual a la longitud de su eje real.

En la hipérbola de la figura 13 el eje real es el segmento **AB,** designado como **2a,** y el eje imaginario es el segmento **CD,** designado por **2b;** ambos se cortan en sus respectivos puntos medios y determinan el centro **O.** El eje real, al cortar la hipérbola, determina los vértices **A** y **B.** Los puntos **F** y **F'** son los focos y se hallan en el eje real; se determinan con un arco de radio igual a la distancia **AC** cuyo centro es el punto **O.** La distancia entre los focos **FF'** se denomina distancia focal **2c.**

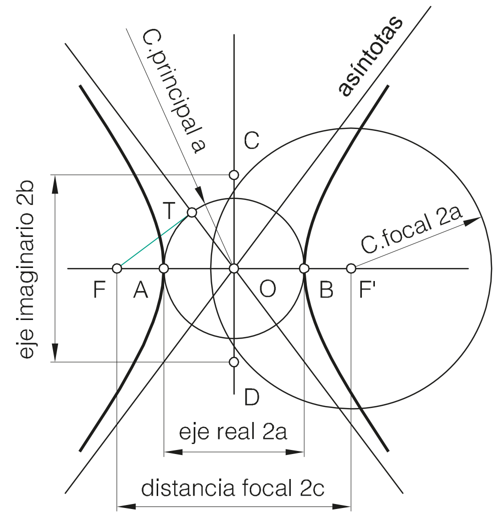


Fig. 13

Las asíntotas* son rectas que pasan por el centro **O** y a las que la hipérbola tiende a aproximarse sin llegar a cortarlas. Para determinar su posición, desde los focos trazamos la tangente a la circunferencia de diámetro **AB,** y obtenemos el punto **T** por el que pasará una de las asíntotas; la otra es simétrica en relación con los ejes de la hipérbola.

La combinación de algunos de los elementos anteriores son los datos más frecuentes para la construcción de una hipérbola:

4.1 Dados los ejes, por puntos

Partiendo de los ejes **AB** y **CD,** determinamos los focos **F** y **F'** (Fig. 14) y situamos las divisiones arbitrarias **1, 2, 3,** etc., a partir de uno de los focos; con radios iguales a las distancias **1A** y **1B,** y con los centros, alternativamente, en los focos **F** y **F',** describimos ocho arcos que, en sus intersecciones, determinarán cuatro puntos de la hipérbola.

Repetiremos el proceso con radios iguales a las distancias **2A** y **2B, 3A** y **3B,** para hallar nuevos puntos de la curva. A mano alzada, como en las otras cónicas, efectuaremos su trazado.

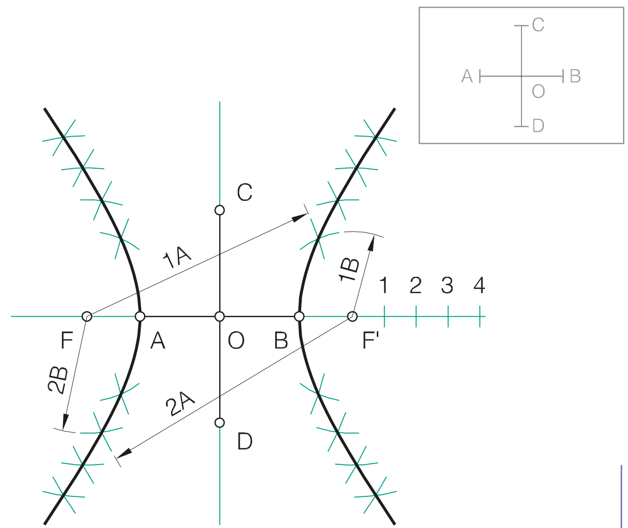


Fig. 14

Catedral de Brasilia (1958-1970), diseñada por Oscar Niemeyer a partir de una estructura de dieciséis columnas de hormigón de sección hiperbólica.

5 LA CIRCUNFERENCIA

A esta curva cónica dedicamos, en el primer curso de Dibujo técnico, la unidad 4; nos centraremos ahora en los ángulos relacionados con ella.

5.1 Ángulos relacionados

- **Ángulo central**
  Es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y por lados, dos de sus radios (Fig. 15). El valor del arco, expresado en grados, coincide con la medida de su ángulo central. Este ángulo se utiliza como referencia para determinar el valor de los restantes ángulos.

- **Ángulo inscrito**
  Tiene el vértice en la circunferencia y sus lados son secantes; la intersección de estos con la circunferencia define un arco que está delimitado por el ángulo inscrito.

  Su valor es la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco. En la figura 16, el triángulo **AOV** es isósceles, siendo iguales los ángulos de vértices **A** y **V;** su suma es lo que falta al ángulo de vértice en **O** del mismo triángulo para valer 180°. Por lo tanto: **OAV + AVO = AOB;** dada la igualdad entre los dos primeros, podremos establecer que **2AVO = AOB** y, finalmente, que **AVO = AOB/2.**

  La demostración anterior, efectuada cuando uno de los lados del ángulo inscrito pasa por el centro de la circunferencia, es generalizable para cualquier posición de los lados.

- **Ángulo semiinscrito**
  Puede considerarse como un caso particular del anterior, al ser uno de los lados del ángulo tangente a la circunferencia (Fig. 17). Su valor también será la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco delimitado por los lados del ángulo semiinscrito: **AVB = VOB/2.**

- **Ángulo interior**
  Es aquel ángulo cuyo vértice es un punto del interior de la circunferencia (Fig. 18), y sus lados son secantes a esta. Su valor es la semisuma de los dos ángulos centrales correspondientes a los arcos abarcados por los lados y sus prolongaciones.

  En el triángulo **AVB’,** el valor del ángulo exterior de vértice **V** es igual a la suma de los dos interiores de vértices **A** y **B’.** Al ser estos últimos ángulos inscritos en la

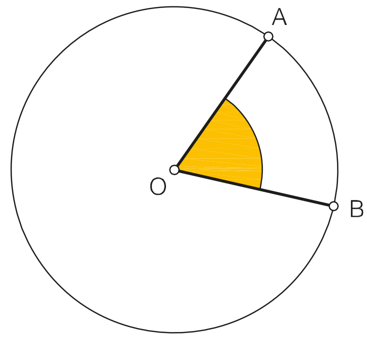


Fig. 15

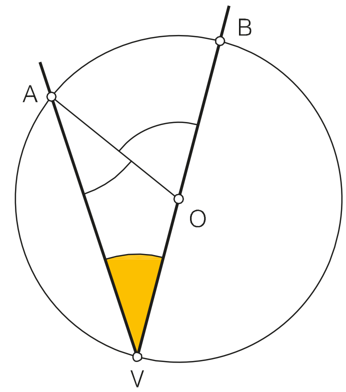


Fig. 16

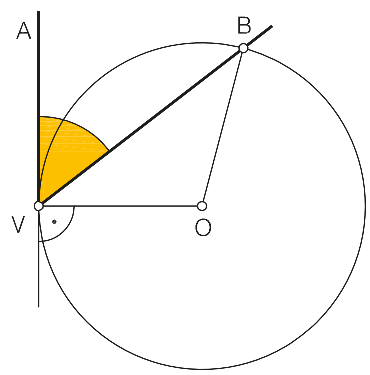


Fig. 17

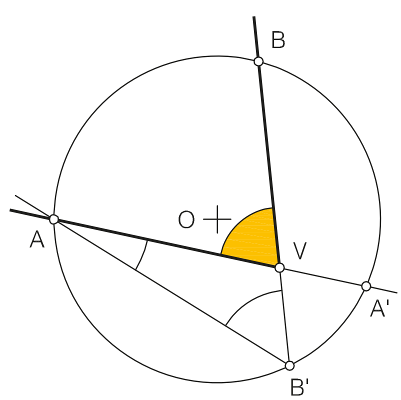


Fig. 18

circunferencia, su valor será la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco, por lo tanto:

AVB = AB'B + A'AB' = AOB/2 + A'OB'/2 = ½ (AOB + A'OB')

- **Ángulo exterior**
  Su vértice es un punto exterior a la circunferencia y sus lados, rectas secantes (Fig. 19). Su valor es la semidiferencia de los dos ángulos centrales correspondientes a los arcos abarcados por sus lados.

  En el triángulo **AVB',** el valor del ángulo exterior de vértice **B'** es igual a la suma de los dos interiores de vértices **A** y **V;** por lo tanto, podremos establecer que:

  AVB = AB'B - VAB' = AOB/2 – A'OB'/2 = ½ (AOB – A'OB')

  En casos extremos los lados podrían ser uno secante y otro tangente o ambos tangentes.

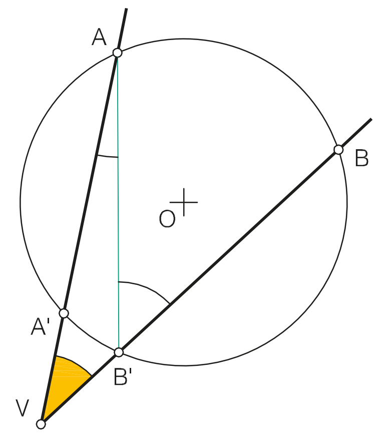


Fig. 19

5.2 Arco capaz

Sea un segmento **AB** y un ángulo α, llamamos arco capaz del ángulo α respecto al segmento **AB** al lugar geométrico formado por los vértices de los ángulos iguales a α y cuyos lados pasan por los extremos **A** y **B** del segmento.

Por el extremo **A** del segmento trazamos una semirrecta que forme el ángulo α con el segmento, y una perpendicular a esta semirrecta. El punto donde esta perpendicular se corta con la mediatriz del segmento **AB** es el centro **O** del arco capaz; su radio es la distancia **OA** (Fig. 20).

El ángulo **AOM** es igual al ángulo α, por tener sus lados respectivamente perpendiculares. Por lo tanto, el ángulo central **AOB** será igual a **2**α y cualquier ángulo inscrito en la circunferencia que pasa por **A** y **B** tendrá por valor la mitad de **AOB,** es decir, el valor de α.

Simétricamente respecto al segmento **AB** podemos considerar la existencia de un segundo arco capaz; desde cualquiera de los puntos de los dos arcos se «ve» el segmento **AB** bajo el mismo ángulo α. El arco capaz tiene numerosas aplicaciones en construcciones de geometría plana (triángulos, por ejemplo), en navegación, etc.

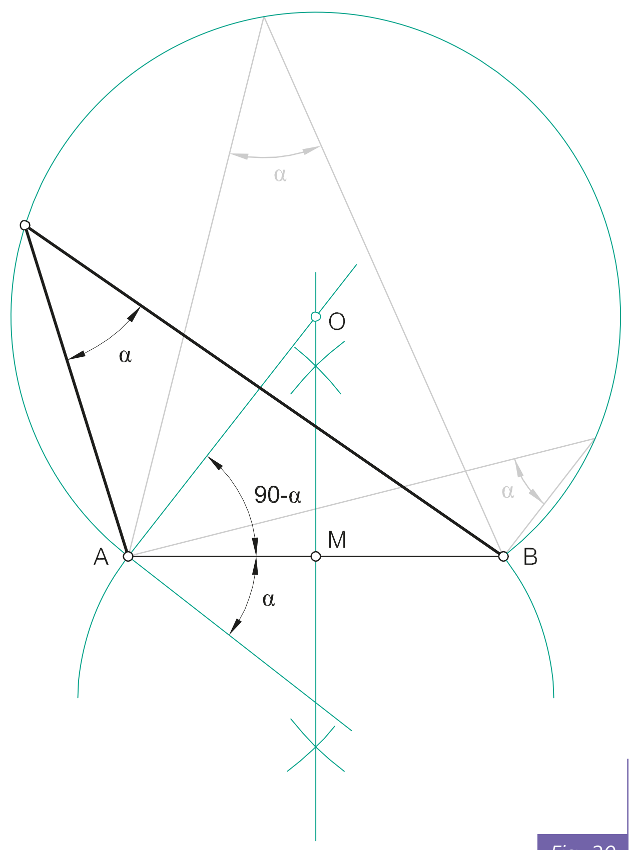
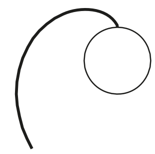
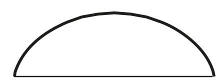
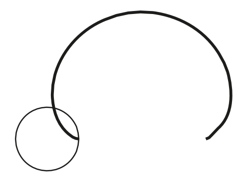
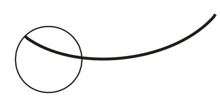


Fig. 20

6 CURVAS CÍCLICAS

Son curvas generadas por las diferentes posiciones del movimiento de un punto de una recta o circunferencia que denominamos ruleta y que rueda sin deslizarse sobre otra recta o circunferencia, denominada directriz. Según estas características tendremos las siguientes curvas:

Tipo de curva	Ruleta	Directriz	Posición	Figura
Evolvente	Recta	Circunferencia		
Cicloide	Circunferencia	Recta		
Epicicloide	Circunferencia	Circunferencia	Exterior	
Hipocicloide	Circunferencia	Circunferencia	Interior	

En engranajes, ruedas dentadas, etc., se utilizan las curvas cíclicas porque son las más idóneas para conformar los perfiles de los dientes, por la disminución del rozamiento mutuo y por su resistencia. Entre la diversidad de perfiles posibles se prefieren los que comportan un mecanizado más fácil, para ahorrar herramientas y tiempo; aquí se incluyen los de perfiles cicloidal y evolvente.

6.1 Evolvente de la circunferencia

Se denomina evolvente la curva plana descrita por un punto de una recta que gira sin deslizarse sobre una circunferencia. Se obtiene al desenrollar un hilo de un carrete circular.

Para trazarla, dividimos la directriz en un número de partes iguales, doce en la figura 21. Por cada punto de división se trazan las tangentes a la circunferencia. Haciendo centro en $\mathbf{T_1}$, y con un radio igual a la distancia $\mathbf{T_1T_0}$, trazamos el arco $\mathbf{A_0A_1}$; a continuación, con centro en $\mathbf{T_2}$ y radio igual a la distancia $\mathbf{T_2A_1}$, trazamos el arco $\mathbf{A_1A_2}$.

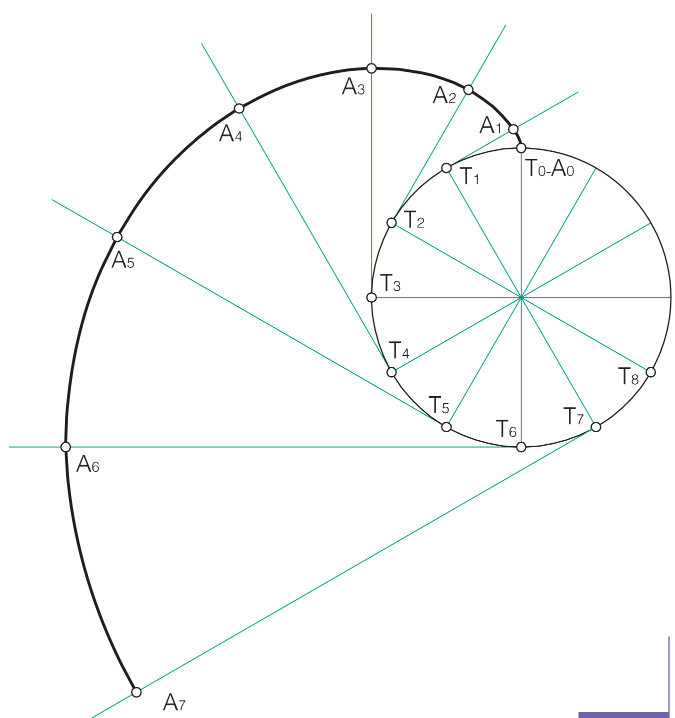


Fig. 21

Proseguimos del mismo modo para completar el resto de puntos: $\mathbf{A_3}$, **A4**, $\mathbf{A_5}$, etc. Su unión a mano alzada, o mediante una plantilla de curvas, completa el trazado de la evolvente.

6.2 La cicloide

La cicloide es la curva plana que describe un punto situado sobre una circunferencia que gira sin deslizarse sobre una recta. Conocida la ruleta o circunferencia generatriz, situamos encima el punto **P** que, con su movimiento de rotación, describirá puntos de la cicloide.

Por el punto **P** trazamos la directriz **r,** tangente a la ruleta y de longitud igual a su rectificación; dividiremos esta longitud y la ruleta en el mismo número de partes, doce en la construcción de la figura 22.

Por los puntos de división de la recta **r** levantamos perpendiculares que, al cortarse con la paralela a **r** trazada por el centro **O** de la ruleta, determinan los puntos $\mathbf{O_1}$, $\mathbf{O_2}$, $\mathbf{O_3}$**...** hasta $\mathbf{O_{12}}$, correspondientes a los centros de las posiciones de la ruleta en su desplazamiento.

Por los puntos **1, 2, 3...** de división de la ruleta trazamos paralelas a la directriz, sobre las que se hallarán los puntos $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$**...** $\mathbf{P_{12}}$ de la cicloide, determinados en las intersecciones respectivas con las posiciones de la ruleta de centros $\mathbf{O_1}$, $\mathbf{O_2}$, $\mathbf{O_3}$**...** $\mathbf{O_{12}}$. A mano alzada, o con la plantilla de curvas, unimos los puntos $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$**...** $\mathbf{P_{12}}$ para obtener la cicloide.

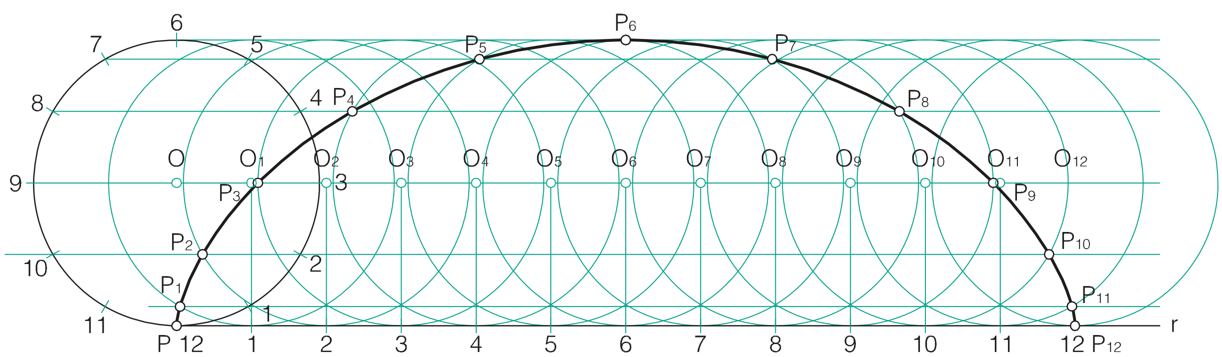
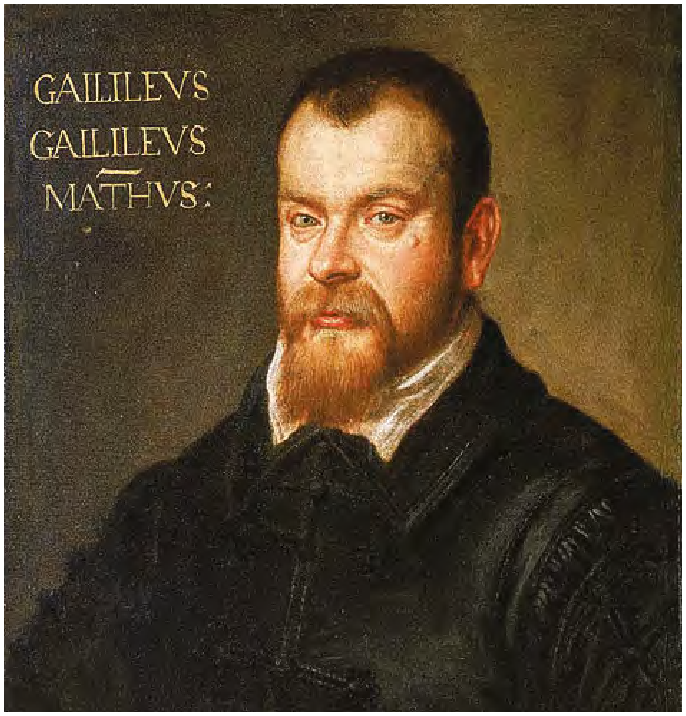


Fig. 22



Galileo Galilei (1564-1642) fue quien denominó a esta curva cicloide y propuso su arco para la construcción de puentes por su gran resistencia estructural.

6.3 La epicicloide

La epicicloide es la curva plana que describe un punto situado sobre una circunferencia (ruleta) que gira sin deslizarse, mediante tangencia exterior, sobre una segunda circunferencia llamada directriz. Conocida la ruleta, situamos encima el punto **P,** que, con su movimiento de rotación, describirá puntos de la epicicloide.

Sobre la recta de unión del centro **O** de la ruleta con el punto **P,** situamos el centro **O'** de la circunferencia directriz y efectuamos su trazado (Fig. 23). Dividimos la ruleta en partes iguales y, al llevar la longitud rectificada de cada una de estas partes sobre la directriz, obtenemos los puntos **1, 2, 3... 12;** la prolongación de los radios que hacemos pasar por estas divisiones, en su intersección con la circunferencia de centro **O'** y radio igual al segmento **O'O,** determina los puntos **O_1, O_2, O_3... O_{12}** correspondientes a las posiciones de los centros de la ruleta en su desplazamiento.

Trazamos circunferencias concéntricas con la directriz que pasen por los puntos de división de la ruleta y, al cortarse con las posiciones parciales de la ruleta de centros **O_1, O_2, O_3... O_{12},** nos determinarán los puntos de paso **P_1, P_2, P_3... P_{12},** de la epicicloide.

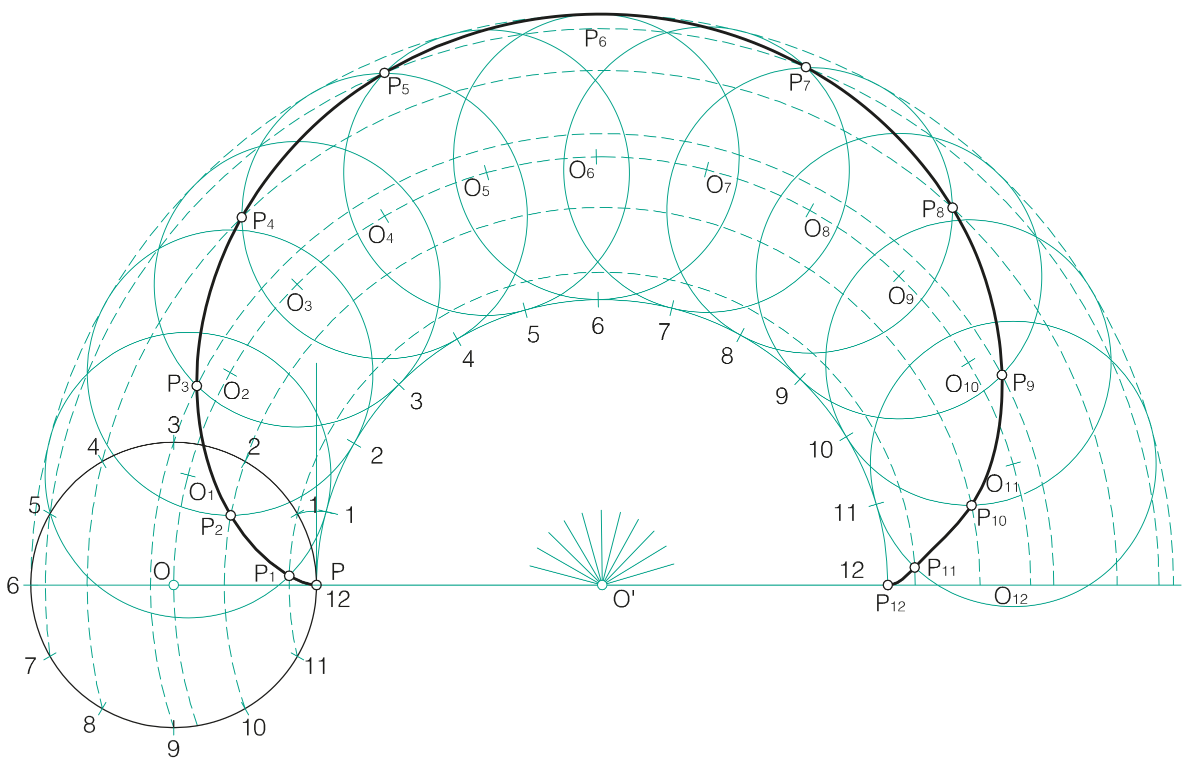


Fig. 23

6.4 La hipocicloide

La hipocicloide es la curva plana que describe un punto situado sobre una circunferencia (ruleta) que gira sin deslizarse, mediante tangencia interior, sobre otra circunferencia a la que llamamos directriz.

Rectificamos la longitud de la ruleta y la llevamos sobre la directriz, dividiendo ambas circunferencias en el mismo número de partes, doce en la construcción de la figura 24. A partir de aquí procederemos como en la epicicloide, realizando el trazado interiormente a la directriz.

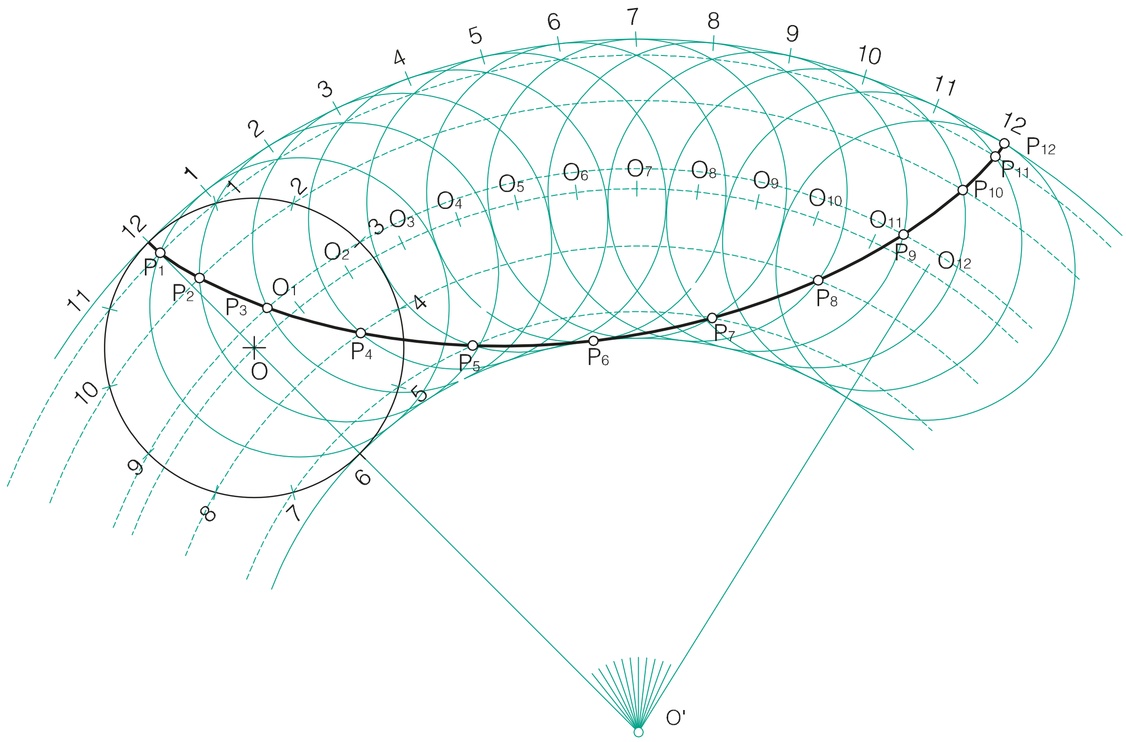


Fig. 24

El mecanismo de Anticitera: el primer ordenador de la historia

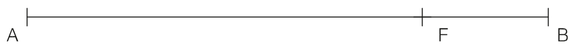
En 1901, unos pescadores de esponjas de la isla griega de Anticitera hallaron en un pecio romano del siglo II a. C. un enigmático mecanismo que resultó ser una sofisticada calculadora capaz de situar de forma precisa la posición de los planetas y de predecir los eclipses de Sol y de Luna.

Según los expertos, se trata de uno de los artilugios astronómicos que Arquímedes de Siracusa ideó con sistemas de engranajes de dientes de perfil de curva cíclica, como el que Cicerón afirma haber visto en el botín que llevó a Roma el general Marcelo después de saquear Siracusa y asesinar involuntariamente al sabio griego.

ACTIVIDADES

CÓNICAS

1 Sobre el segmento **AB** de la figura 25 está situado uno de los focos de la elipse; determina la posición del otro foco y del eje menor de la curva. Traza la elipse mediante alguno de los procedimientos estudiados.



2 Determina los ejes de una elipse de la cual conocemos los dos focos y la posición de uno de sus puntos (Fig. 26). Traza la curva.

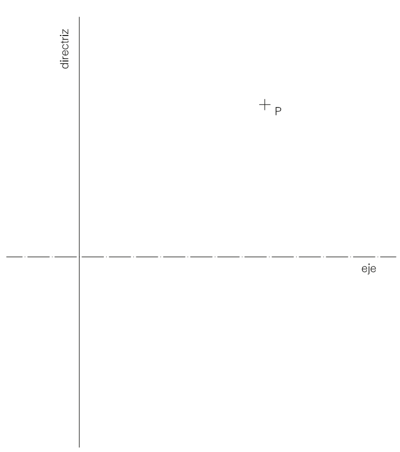
3 Traza una elipse de la que conocemos un par de sus diámetros conjugados, de longitudes 67 mm y 54 mm, que se cortan con un ángulo de 75°.

4 Dibuja una hipérbola de la que conocemos los dos ejes: **AB,** de 55 mm, y **CD,** de 33 mm.

5 Determina los vértices y las asíntotas de una hipérbola definida por sus focos **F** y **F’** y un punto **P** de esta (Fig. 27).

6 Traza una parábola por puntos sabiendo que la distancia del foco a la directriz es de 45 mm.

7 Determina el foco y el vértice de una parábola de la cual conocemos la directriz, el eje y un punto **P** de paso (Fig. 28).



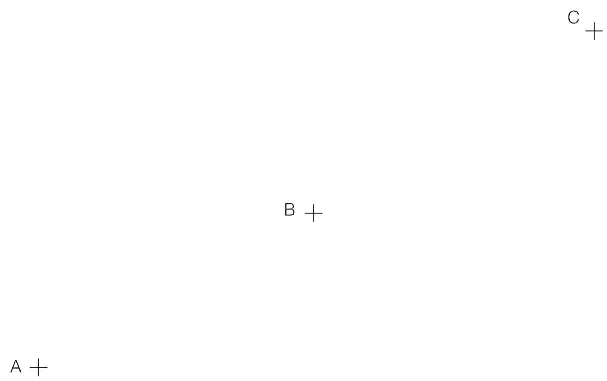
ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA Y ARCO CAPAZ

8 Por el punto de tangencia de dos circunferencias se traza una secante común a ambas; demuestra que:

- **a** Los radios trazados en los extremos de la secante son paralelos.
- **b** Las tangentes trazadas en esos mismos extremos serán también paralelas.

9 Llamamos ángulo exinscrito al ángulo que tiene su vértice sobre la circunferencia, siendo uno de sus lados secante y el otro exterior a la circunferencia. Demuestra que su medida es la semisuma de los ángulos centrales, correspondientes a los arcos comprendidos entre el vértice y los extremos del lado interior, y la prolongación del lado exterior.

10 Desde la posición **X** de un barco sobre el mar, se divisan los tres puntos conocidos de la costa **A, B** y **C** de la figura 29, y se miden los ángulos **AXB** de 45° y **BXC** de 15° que forman entre sí las visuales. Con estos datos, fija la posición del punto **X** en el mapa.



11 Determina un punto interior a un triángulo **ABC,** equidistante de los lados **a** y **b,** y desde el cual se vea el tercer lado del triángulo bajo un ángulo de 60°. Lados **a** = 9,5 cm, **b** = 11,3 cm y **c** = 7,5 cm.

12 Traza la evolvente de una circunferencia directriz de radio 2 cm.

13 Dibuja la cicloide, cuya ruleta es una circunferencia de radio 2,5 cm.

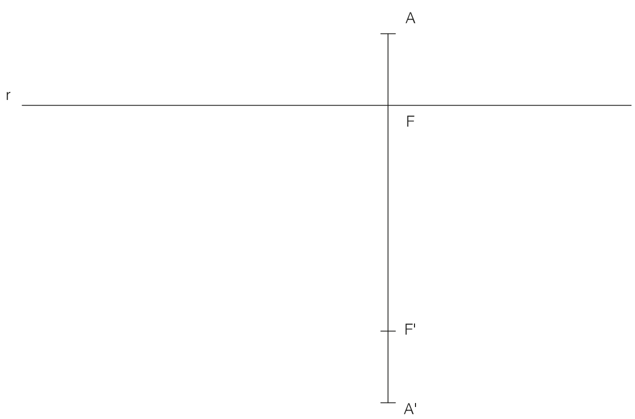
14 Dibuja una epicicloide en la que los radios de la ruleta y de la circunferencia directriz son, respectivamente, 20 y 50 mm.

15 Con los mismos datos de la actividad anterior, traza la hipocicloide.

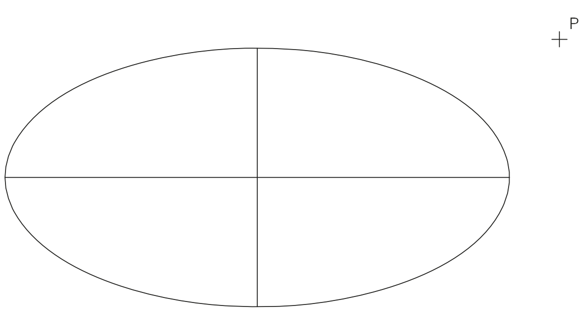
CÓNICAS

16 Halla el centro, el foco **F’** y el eje menor **2b** de una elipse de la cual conocemos un punto **P,** el otro foco **F,** la dirección del eje mayor y el valor del semieje mayor, **a** = 35 mm. Dibuja la elipse por puntos (Fig. 30).

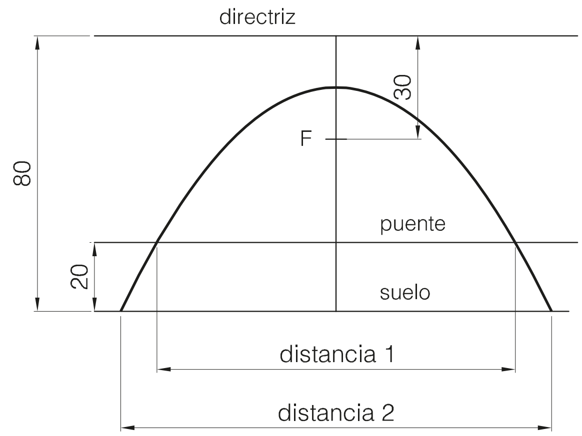
17 De una elipse conocemos sus focos **F** y **F’** y los vértices **A** y **A’** de su eje mayor. Obtén los puntos de intersección con la cónica de la recta **r** que pasa por **F** y es perpendicular al eje mayor. Explica de manera razonada los conceptos geométricos utilizados en la resolución del ejercicio (Fig. 31).



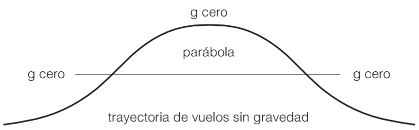
18 A partir de la elipse trazada, determina las longitudes de los ejes de la elipse homotética respecto a su centro y que pasa por el punto **P.** Dibuja dicha elipse (Fig. 32).

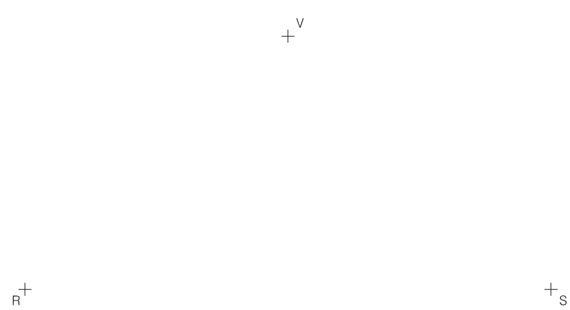


19 Se quiere construir un puente cuya estructura está definida por una parábola (Fig. 33). Construye la parábola, dados la recta directriz y el foco **F,** y obtén los valores de las distancias 1 y 2, intersecciones de la parábola con el puente y el suelo, respectivamente.

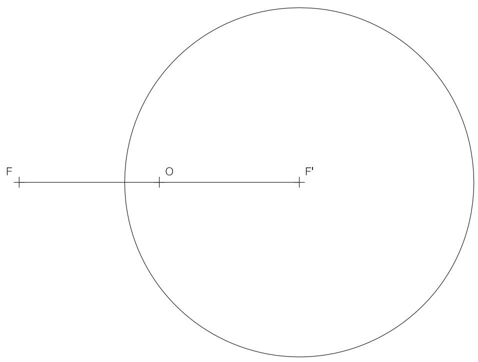


20 En el esquema de la figura 34 se muestra la trayectoria parabólica del vuelo sin gravedad de una aeronave. Dibújala entre sus puntos **R** y **S** (gravedad cero) si **V** es el punto de máxima altitud (vértice). El eje de la parábola es vertical. La visión de la línea del horizonte, a 500 metros del vértice, haría de directriz. Escala 1:50.000.





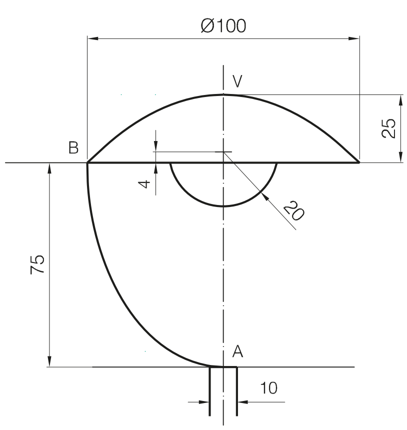
21 De una curva cónica conocemos los focos **F** y **F'** y una de las circunferencias focales. Determina los ejes de la curva (Fig. 35).



22 De una hipérbola equilátera* se conocen el eje real y los vértices **A** y **A'.**
- Determina las asíntotas.
- Determina gráficamente los focos **F** y **F'.**
- Dibuja por puntos las dos ramas de la cónica (Fig. 36).

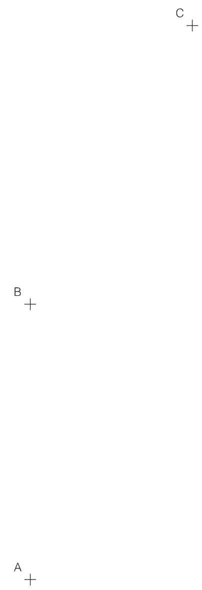
23 La figura 37 representa una luminaria en proyección diédrica según las siguientes curvas:
- La bombilla es un arco de circunferencia cuyo radio es 20 cm.
- La pantalla es una parábola de vértice **V** y eje vertical.
- El arco de soporte es elíptico, de vértices **A** y **B** y semiejes de 75 cm y 5 cm.

Dibuja a escala 1:10 los arcos circulares, parabólico y elíptico del contorno de la luminaria de la vista en alzado. Determina tres puntos de la parábola entre **V** y **B,** y tres más de la elipse entre **A** y **B.**



ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCI A Y ARCO CAPAZ

24 Determina gráficamente el punto **P** del plano desde el que se «observan» los puntos **A** y **B** con un ángulo de 120º y los puntos **B** y **C** con un ángulo de 45º (Fig. 38).



25 Dos faros se encuentran separados 10 km. Un barco navega cerca de la costa; cuando está a 5 km del primer faro, ve los dos faros bajo un ángulo de 60º; sigue avanzando y, cuando se encuentra a 3 km del segundo faro, vuelve a ver los dos faros bajo el mismo ángulo.

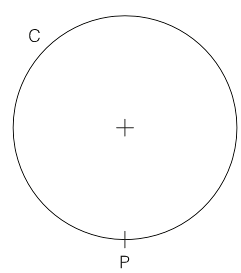
a Dibuja a escala 1:100.000 el segmento que define la posición de los dos faros y el que define la trayectoria del barco.

b Calcula y expresa en km la distancia que ha recorrido el barco entre las dos observaciones.

CURVAS CÍCLICAS

26 Para completar las conexiones de un sensor de presión del neumático de un automóvil, se necesita conocer su trayectoria. El sensor está situado en el punto **P** de la circunferencia **c,** la cual representa el neumático.

Dibuja la trayectoria de **P** cuando la circunferencia rueda sin deslizarse sobre una recta. Escribe el nombre de la curva resultante (Fig. 39).



Transformaciones

CA Competencia en aprender a aprender

1 TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Una transformación geométrica es una operación, o la combinación de varias de ellas, que permite deducir una forma geométrica a partir de otra inicial. A cada punto de la forma origen le corresponde otro en la forma transformada, al que denominamos **homólogo** o imagen del primero; cuando ambos coinciden en un mismo punto, diremos que este es doble para dicha transformación.

El aspecto de la forma homóloga respecto a la original permite establecer los siguientes tipos de transformaciones:

- **Isométricas:** el elemento homólogo conserva invariantes* las dimensiones y ángulos de la forma inicial. Son transformaciones de este tipo las **simetrías axial** y **central,** el **giro** o rotación y la **traslación.** A todas ellas también se las denomina movimientos y las estudiamos en el primer curso de Dibujo técnico 1.
- **Isomórficas:** el elemento homólogo conserva invariante la forma (ángulos) de la inicial, existiendo proporcionalidad entre sus dimensiones. A este grupo, también conocido, pertenecen la **homotecia** y la **semejanza.**
- **Anamórficas:** se dan cuando hay un cambio de forma entre la figura inicial y su homóloga. Las transformaciones de este tercer grupo, **homología, afinidad** e **inversión,** son las que estudiamos en esta unidad.

La superficie del agua del río Hudson actúa como plano de una simetría tridimensional del perfil urbano de Manhattan.

2 LA HOMOLOGÍA

2.1 Homología en el espacio

La homología en el espacio es una transformación proyectiva* cuyo centro es un punto propio **V.** Al cortar la radiación de vértice **V** por dos planos, el del suelo y el del dibujo en la representación de la figura 1, obtendremos sobre cada uno de ellos una sección plana, **ABC** y **A'B'C',** respectivamente. Ambas secciones, que son figuras homólogas en el espacio, cumplen las siguientes condiciones:

- En cada rayo proyectivo que pasa por **V** se hallan un punto y su homólogo, cada uno de ellos situado en uno de los planos: **A** y **A', B** y **B',** etc.
- Las rectas homólogas se cortan en puntos del eje de la homología formado por puntos dobles*, homólogos* de sí mismos. En la representación espacial de la figura 1, el eje de la homología es la intersección entre los planos del suelo y del dibujo.
- En la homología no se conservan, y por lo tanto no son invariantes, propiedades métricas como el paralelismo o la perpendicularidad, ni las medidas de segmentos y ángulos.

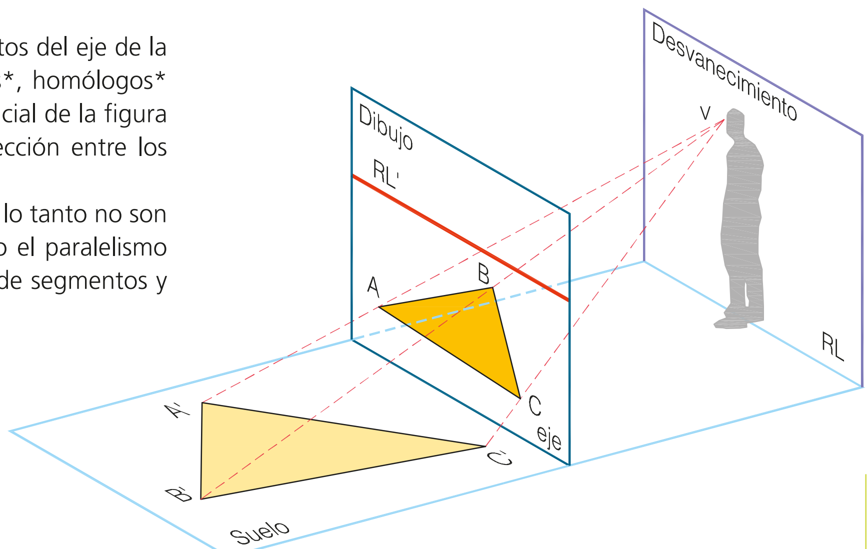


Fig. 1

2.2 Homología en el plano. Características

Si en la figura anterior abatimos* el plano del dibujo, respecto a su intersección con el plano del suelo, hasta que las dos secciones sean coplanarias y determinen la homología plana de la figura 2, esta puede definirse como una transformación geométrica biunívoca* de una figura en otra, de forma que entre ambas se cumplan las siguientes relaciones:

- Cada punto y su homólogo están alineados con el centro o vértice **V** de la homología.
- Cada recta y su homóloga se cortan en un mismo punto, homólogo de sí mismo, situado en el eje de la homología.
- Las rectas que unen cada punto con su homólogo pasando por el centro de la homología son rectas dobles, por ser homólogas de sí mismas.

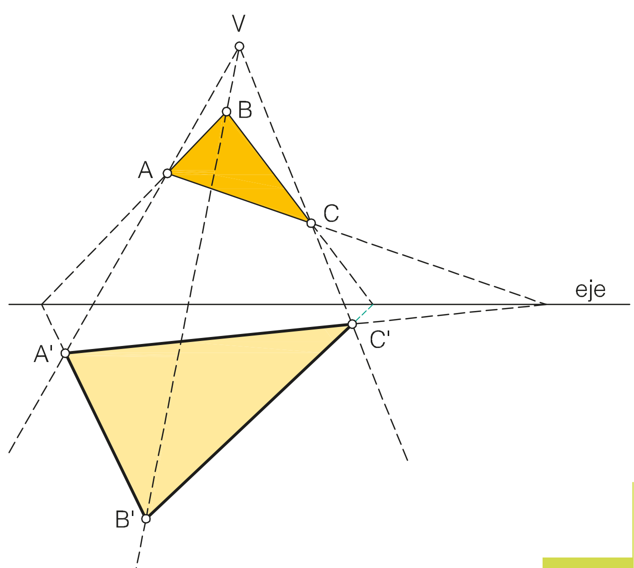


Fig. 2

2.3 Rectas límite de una homología

Cada recta límite de una homología representa el lugar geométrico de los puntos del infinito de una de las dos figuras relacionadas en esa homología. Los homólogos* de los puntos del infinito del triángulo **A'B'C'** (Fig. 3) se hallan sobre la recta límite **RL** correspondiente al triángulo homólogo **ABC.**

La semirrecta **VM'$_\infty$,** que parte del centro **V** de la homología, se traza paralela a **A'B'.** El punto **M** de intersección de la semirrecta con la recta **AB** pertenece a la recta límite del triángulo **ABC.** De forma similar encontramos el punto **N** homólogo de **N'$_\infty$** del triángulo **A'B'C'.** La recta que definen los puntos **M** y **N** es la recta límite **RL.**

La segunda recta límite **RL'** es paralela a **RL** y se traza tras determinar uno de sus puntos, **S',** de modo similar a como hemos determinado **M** y **N.**

Las rectas límite son paralelas al eje de la homología y la distancia **d** del vértice a una de las rectas límite es la misma que la del eje a la otra recta límite, siendo ambas interiores o exteriores al conjunto de vértice y eje.

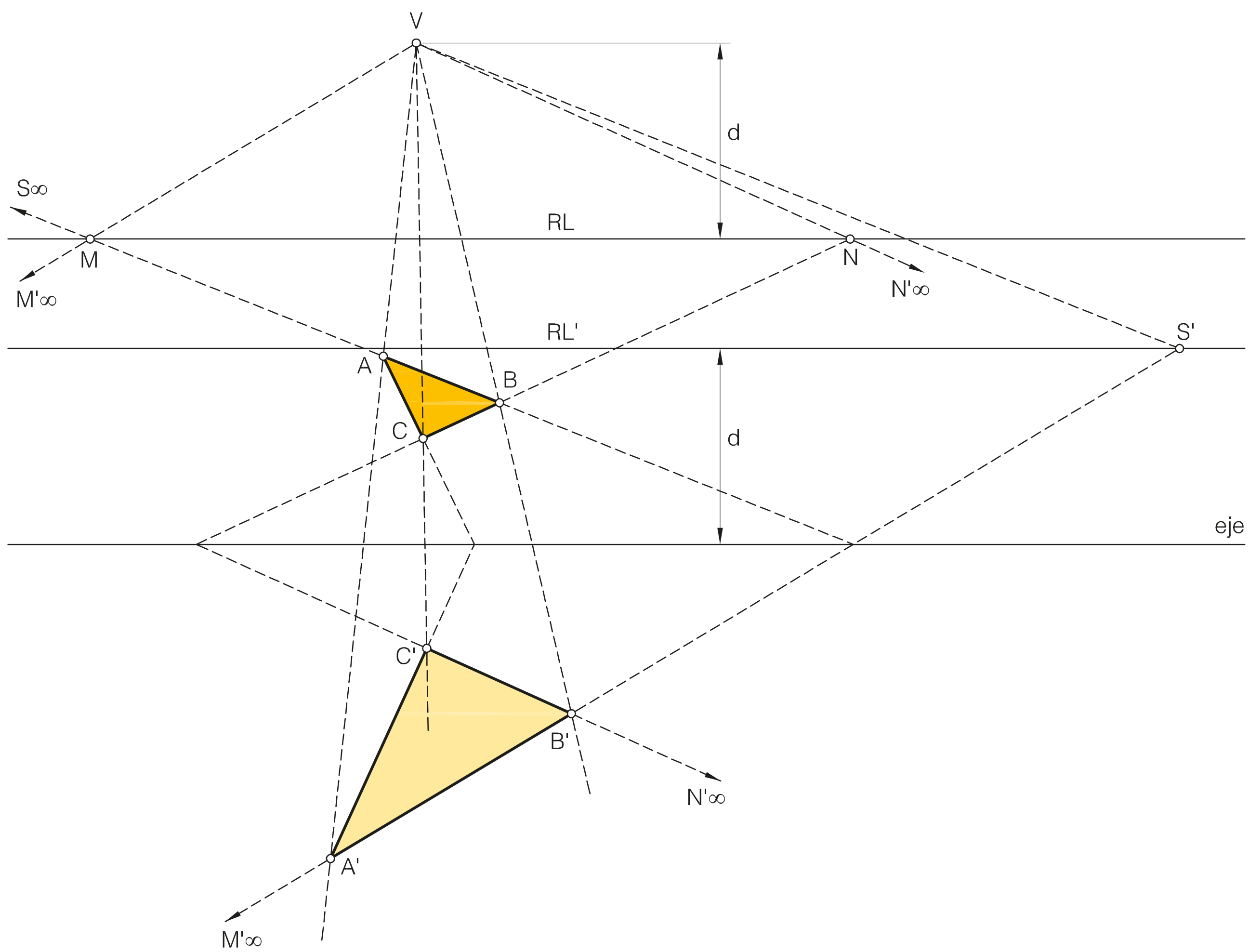


Fig. 3